

ძვირფასო სტუდენტებო,
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 19. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 19-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

19.3. სავარჯიშოები №

1 – გ.ე.ზ	1 – ბ.დ.ვ.ი	2 – ბ	2- დ	3	4 – ა.დ.თ	4 – ბ.გ.ვ.კ	5 – ა.გ.თ.ლ	5 – ბ.ვ.ი.მ		6- ა.გ.ე.	6 – ბ.დ.ვ.ზ	7
8	9	10										

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

(მოცემული ინტეგრალების გამოსათვლელად ვიყენებთ ინტეგრალის თვისებებს)

1 - გ. $\int x^5 dx$

ამოხსნა

$\int x^5 dx = 1/6x^6 + C$, სადაც C აქვს და შემდეგ მაგალითებშიც ნებისმიერი მუდმივია
 პასუხი: $1/6x^6 + C$.

1 - ე. $\int x^{-2} dx$

ამოხსნა

$\int x^{-2} dx = -x^{-2+1} + C = -1/x + C$
 პასუხი: $-1/x + C$.

1 - ზ. $\int 2t^{-1/2} dt$

ამოხსნა

$$\int 2t^{-1/2} dt = 2t^{(-1/2+1)/(-1/2+1)} + C = 4t^{1/2} + C$$

პასუხი: $4t^{1/2} + C$.

2 - ბ. იპოვეთ $f(x) = 2x - 1$ ფუნქციის ისეთი პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკზეც ძევს $A(0,1)$ წერტილი.

ამოხსნა

$$\int (2x - 1) dx = 2 \int x dx - \int dx = x^2 - x + C$$

როგორც ჩანს $f(x) = 2x - 1$ ფუნქციის პირველყოფილია $F(x) = x^2 - x + C$, სადაც C ნებისმიერი მოდმივია, რადგან $A(0,1)$ წერტილი ძევს პირველყოფილი ფუნქციის გრაფიკზე, ამიტომ მუდმივისათვის მიიღება $C = 1$, ე.ი $F(x) = x^2 - x + 1$.

პასუხი: $F(x) = x^2 - x + 1$.

4 - ა. $\int (3y^{1/2} - 2y^{-3}) dy$

ამოხსნა

$$\int (3y^{1/2} - 2y^{-3}) dy = 3 \int y^{1/2} dy - 2 \int y^{-3} dy = 2y^{3/2} + y^{-2} + C$$

პასუხი: $2y^{3/2} + y^{-2} + C$

4 - დ. $\int (x^{3/2} - 1/2x^{-1/2} + 2^{1/2}) dx$

ამოხსნა

$$\int (x^{3/2} - 1/2x^{-1/2} + 2^{1/2}) dx = 2/5 x^{5/2} - x^{1/2} + 2^{1/2}x + C$$

პასუხი: $2/5 x^{5/2} - x^{1/2} + 2^{1/2}x + C$

4 - თ. $\int (x^2 + 3x - 2)/x^{1/2} dx$

ამოხსნა

$$\int (x^2 + 3x - 2)/x^{1/2} dx = \int (x^{3/2} + 3x^{1/2} - 2x^{-1/2}) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + 2x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$$

პასუხი: $\frac{2}{5} x^{5/2} + 2x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$.

5 ა. $\int (2x + 6)^5 dx$

ამოხსნა

$$\int (2x + 6)^5 dx = \int dt: t = 2x + 6, \text{ აქედან } dt = 2dx, \text{ ე.ი } dx = 1/2 dt = 1/2 \int t^5 dt = 1/12 t^6 + C = 1/12 (2x + 6)^6 + C$$

პასუხი: $1/12(2x + 6)^6 + C$.

5 გ. $\int (4x - 1)^{1/2} dx$

ამოხსნა

$$\int (4x - 1)^{1/2} dx = | \text{აღ: } t = 4x - 1, \text{ აქედან } dt = 4dx, \text{ ე.ო } dx = 1/4 dt | = \\ = 1/4 \int t^{1/2} dt = 1/6 t^{3/2} + C = 1/6(4x - 1)^{3/2} + C.$$

პასუხი: $1/6(4x - 1)^{3/2} + C$.

5 თ. $\int t(t^2 + 1)^5 dt$

ამოხსნა

$$\int t(t^2 + 1)^5 dt = | \text{აღ: } x = t^2 + 1, \text{ გვექნება } dx = 2tdt, \text{ საიდანაც } tdt = 1/2 dx | = \\ = 1/2 \int x^5 dx = 1/12 x^6 + C = 1/12(t^2 + 1)^6 + C.$$

5 ლ. $\int x^5 e^{1-x^6} dx$

ამოხსნა

$$\int x^5 e^{1-x^6} dx = | \text{აღ: } 1 - x^6 = t, \text{ აქედან } dt = -6x^5 dx, \text{ ე.ო } x^5 dx = -1/6 dt | = \\ = -1/6 \int e^t dt = -1/6 e^t + C = -1/6 e^{1-x^6} + C.$$

პასუხი: $-1/6 e^{1-x^6} + C$.

შემდეგ მაგალითებში ვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას: $\int u dv = uv - \int v du$

6 -ა. $\int x \sin x dx$

ამოხსნა

$$\int x \sin x dx = - \int x d \cos x = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

პასუხი: $-x \cos x + \sin x + C$.

6 -ბ. $\int x^2 \sin x dx$

ამოხსნა

$$\int x^2 \sin x dx = - \int x^2 d \cos x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx; \text{ ხოლო მეორე } \\ \text{შესაკრებისათვის კვლავ ვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას}$$

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C,$$

$$\text{ე.ი. } \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x + C.$$

პასუხი: $-x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x + C.$

$$6\text{-ე. } \int x^2 e^x dx$$

ამოხსნა

$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$, ხოლო მეორე წევრისათვის კვლავ ვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას

$$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C, \text{ ე.ი საბოლოოდ:}$$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C.$$

პასუხი: $x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C.$

7. ფირმამ დაადგინა, რომ მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის Q ერთეულის საწარმოებლად არის $1.92 - 0.002Q$ ლარი. გაიგეთ, რამდენი დაიხარჯება პირველი 100 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 562 ლარი.

ამოხსნა

ვთქვათ, მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $TC(Q) = C(Q)$, მაშინ მარგინალური დანახარჯი იქნება $MC(Q) = C'(Q)$, ე.ი

$$C(Q) = \int (1.92 - 0.002Q) dQ = 1.92Q - 0.001Q^2 + K;$$

პირობის თანახმად

$$C(1) = 1.92 - 0.001 + K = 562, \text{ აქედან } K = 560.08, \text{ ხოლო}$$

$$C(100) = 192 - 0.001(10000) + 560.08 = 742.08.$$

პასუხი: პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის საწარმოებლად დაიხარჯება 742,08 ლარი.

9. მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას აქვს სახე $(MC) = K'(Q) = 0.006Q^2 - 1.5Q + 8$, სადაც $K(Q)$ არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქცია, ხოლო Q -წარმოებული პროდუქციის მოცულობა. ფიქსირებული დანახარჯია 20 000 ლარი. გამოთვალეთ დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის წარმოებას.

ამოხსნა

$$K(Q) = \int (0.006Q^2 - 1.5Q + 8) dQ = 0.002Q^3 - 0.75Q^2 + 8Q + C,$$

პირობის თანახმად: $K(0) = C = 20\ 000.$

$$K(100) = 0.002(10^6) - 0.75(10^4) + 20\ 000 = 15\ 300.$$

პასუხი: პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის წარმოებისათვის დაიხარჯება 15 300 ლარი.

